CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 18 december 2023
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:						
Opgave	1	2	3	4	5	6
a	6	3	7	2	4	5
b	6	8	5	4	4	3
c	5		5	2		6
e			4			2
Totaal	17	11	21	8	8	16

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x$.
De grafiek van f heeft een minimum in punt A en een maximum in punt B.

6pt a Bereken algebraïsch de helling van de rechte lijn door punt A en punt B.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = \frac{x-2}{3x-2}$.
Punt C en punt D zijn de punten op de grafiek van g waar de raaklijn aan deze grafiek evenwijdig loopt met de lijn met vergelijking $y = x$.

6pt b Bereken algebraïsch de *x*-coördinaten van punt C en punt D.

Het verband tussen de variabelen P en Q wordt gegeven door de formule

$$\log(P) = 4 + 2 \cdot \log(Q)$$

Dit verband kan ook worden weergegeven met een formule van de vorm

$$Q = a \cdot P^b$$

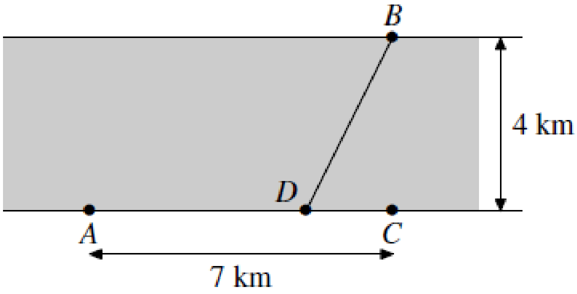
5pt c Bereken algebraïsch de waarden van a en b in deze tweede formule.

 © CCVW

Opgave 2 – Fietsen van A naar B

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De gemeente Fytsinga wil een fietspad aanleggen van *A* naar *B* door een natuurgebied (de grijze strook in de figuur hieronder).



De kosten voor een fietspad langs de rand van het natuurgebied (van punt *A* in de richting van punt *C*, dat recht onder punt *B* ligt) zijn 30 000 euro per kilometer. De kosten voor een fietspad dwars door het natuurgebied zijn 50 000 euro per kilometer. De gemeente is op zoek naar een punt *D* tussen *A* en *C* zo dat de kosten voor een fietspad van *A* via *D* naar *B* minimaal zijn.

Als we de afstand in kilometers tussen *A* en *D* aangeven met x, dan wordt de afstand in kilometers tussen *D* en *B* gegeven door $\sqrt{x^2 - 14x + 65}$.

3pt a Toon dit aan met behulp van de Stelling van Pythagoras.

De totale kosten voor de aanleg van het fietspad van *A* via *D* naar *B* in tienduizenden euro's worden gegeven door

$$TK = 3x + 5\sqrt{x^2 - 14x + 65}$$

8pt b Bereken algebraïsch de waarde van x waarvoor TK minimaal is.

 © CCVW

Opgave 3 – Een zak met schone sokken

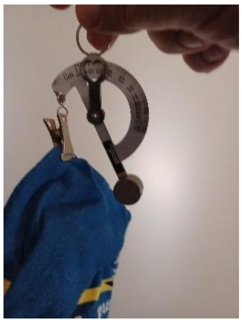
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Nadat hij de was gedaan heeft, doet George zijn schone sokken in een zak. Op een gegeven moment zitten er 4 rode sokken, 4 gele sokken en twee blauwe sokken in deze zak. George pakt (aselect en zonder terugleggen) sokken uit deze zak totdat hij twee sokken met dezelfde kleur heeft. Het aantal sokken dat hij uit de zak pakt is een toevalsvariabele X.
Als George de sokken pakt in de volgorde rood, geel, blauw, rood dan heeft hij 2 sokken van dezelfde kleur nadat hij 4 sokken heeft gepakt en dan geldt dus $X = 4$.

Voor deze toevalsvariabele geldt: $P(X = 2) = \frac{13}{45}$ en $P(X = 4) = \frac{12}{45}$.

7pt a Toon dit aan.

5pt b Bereken $E(X)$.



Op een regenachtige dag meet George het gewicht van zijn sokken. Hij concludeert dat dit gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van $\mu = 13$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 0.5$ g.
In het vervolg van deze opgave en in opgave 4 mag u aannemen dat deze conclusie klopt.

Op een gegeven moment besluit George om iets nuttigers te gaan doen en hij stopt zijn was in de wasmachine. Hierbij zitten onder andere 13 paar (= 26) sokken.

5pt c Hoeveel van deze sokken hebben volgens de vuistregels een gewicht tussen $12{,}5$ g en 14 g?

4pt d Bereken de kans dat precies 5 van de 10 sokken die oorspronkelijk in de zak zaten meer dan 13 g wegen.

Opgave 4 – Nieuwe sokken kopen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

George wil nieuwe sokken kopen. Voordat hij een groot aantal sokken koopt, wil hij toetsen of het gewicht van de sokken in de winkel gelijk is aan het gewicht van de sokken die hij in opgave 3 gewogen heeft. Daar had hij gevonden dat $\mu = 13$. Om dit te toetsen koopt hij 8 paar sokken (= 16 sokken). In deze toetsingsprocedure neemt hij aan dat het gewicht van de sokken in de winkel normaal verdeeld is met een standaardafwijking van $\sigma = 0{,}5$ g en neemt hij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$.

2pt a Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

Het gemiddelde gewicht van de 16 sokken is $12{,}77$ g.
Dit geeft een overschrijdingskans van $0{,}033$.

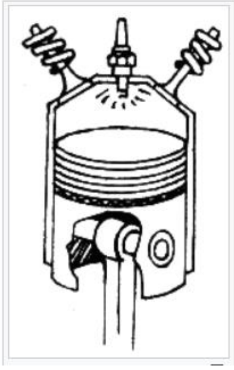
4pt b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de toetsingsgrootheid die gebruikt is om deze overschrijdingskans te bepalen.

2pt c Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure?
Licht uw antwoord toe!

 © CCVW

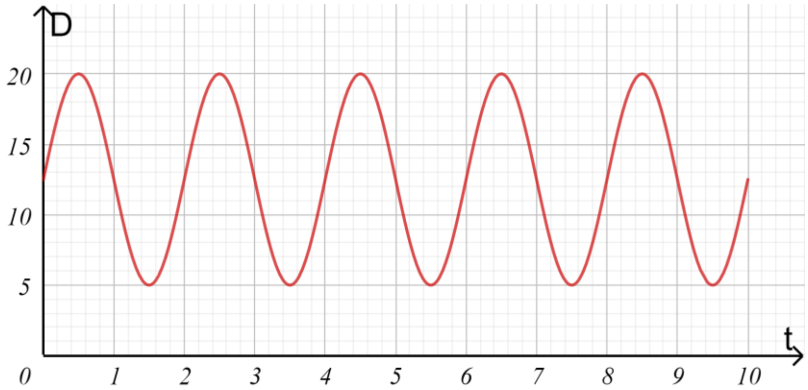
Opgave 5 – Zuigers in cilinders

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!



Een belangrijk onderdeel van een benzinemotor is de cilinder. Hierin beweegt een zuiger op en neer. Zo wordt de energie die vrijkomt bij het verbranden van de benzine boven in de cilinder omgezet in een roterende beweging van de stang onderin de cilinder. De motor van een benzineauto bevat doorgaans 4 of 8 cilinders.

In de figuur hieronder is het verband weergegeven tussen de afstand van de bovenkant van een bepaald type cilinder en de bovenkant van de zuiger in centimeters (D) en de tijd in seconden (t).



Bij deze figuur past een formule van de vorm $D = a + b\sin(ct)$.

4pt a Bepaal de waarden van a, b en c in deze formule.

Voor een ander type cilinder wordt het verband tussen de afstand tussen de bovenkant van de cilinder en de bovenkant van de zuiger in centimeters (D) en de tijd in seconden (t) gegeven door

$$D = 20 + 10\sin\left(\frac{2}{3}\pi t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

4pt b Bereken algebraïsch de eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop D minimaal is volgens deze formule.

 © CCVW

Opgave 6 – De groei van twee steden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Tussen 1950 en 2000 groeide het aantal inwoners van stad *A* exponentieel.
Het groeipercentage was 44% per 10 jaar.

5pt a Bereken algebraïsch de tijd in maanden waarin het aantal inwoners van stad *A* verdubbelde tussen 1950 en 2000.

3pt b Bereken algebraïsch het percentage waarmee het aantal inwoners van stad *A* groeide tussen 1 januari 1985 en 1 januari 1990.

Het aantal inwoners van stad *B* wordt gegeven door de formule

$$N = 20 \cdot (25 - 20\mathrm{e}^{-0{,}2t}).$$

In deze formule is N het aantal inwoners van stad *B* in duizenden en is t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 1950.

6pt c Bereken algebraïsch het tijdstip (jaar en maand) waarop het aantal inwoners van stad *B* gelijk was aan 200 000.

2pt d Bereken het maximale aantal inwoners van stad *B* volgens de hierboven gegeven formule.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

 © CCVW

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

 © CCVW

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\dots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

 © CCVW